

基于微观力学模型的砂土非共轴特性研究¹⁾汪海林^{*,†} 顾晓强^{*,**,2)} 尹振宇[†]^{*}(同济大学土木工程学院地下建筑与工程系, 上海 200092)[†](香港理工大学土木及环境工程学系, 香港 999077)^{**}(浙江理工大学建筑工程学院, 杭州 310018)

摘要 砂土的非共轴特性表现为主应力方向与塑性应变率方向不一致的现象. 学者通过单剪试验空心圆柱扭剪试验系统研究了其力学机制. 已有研究表明, 切应力增量会促使土体沿该方向发生塑性变形, 导致主应力方向与塑性应变率方向逐渐趋于共轴. 微观上, 砂土的非共轴特性源于颗粒接触分布不均引起的组构各向异性. 为了考虑各向异性, 传统的弹塑性本构模型通常在屈服函数、塑性势函数、临界状态线及剪胀方程中引入各向异性参数. 然而, 这些参数通常具有经验性, 缺乏明确的理论依据. 相比之下, 微观力学模型在应力积分时直接考虑土的组构各向异性, 无需像传统的弹塑性本构模型引入经验性的各向异性参数. 本文基于 Chang-Hicher (CH) 微观力学模型并结合旋转后的二阶偏组构张量以及组构演化公式, 模拟了不同加载方向的排水三轴和空心圆柱扭剪试验. 试验的模拟结果均表明砂土的应力比、体积应变以及各向异性随着应变的发展均趋于临界状态, 验证了该模型符合各向异性临界状态理论. 同时, 土的强度和变形特性与组构的演化息息相关. 对于加载方向与组构主方向不一致的非共轴加载条件, 土体在大应变下的强度显著降低, 随后组构的变化导致加载方向的法向接触的比例增大, 土体的强度得以恢复. 与文献中报道的模拟结果相比, CH 微观力学模型更好地捕捉了加载方向对于砂土力学行为的影响.

关键词 砂土, 非共轴特性, 微观力学, 各向异性, 组构演化

中图分类号: O344

文献标识码: A

DOI: 10.6052/0459-1879-25-349

CSTR: 32045.14.0459-1879-25-349

STUDY ON THE NON-COAXIAL BEHAVIOR OF SAND BASED ON A
MICROMECHANICAL MODEL¹⁾Wang Hailin^{*,†} Gu Xiaoliang^{*,**,2)} Yin Zhenyu[†]^{*}(Department of Geotechnical Engineering, College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)[†](Department of Civil and Environmental Engineering, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong 999077, China)^{**}(School of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract The non-coaxial behavior of sand is characterized by the misalignment between the directions of the principal stress and the plastic strain rate. Researchers have systematically studied its mechanical mechanism through single shear tests and hollow cylinder torsional shear tests. Existing research indicates that an increment in shear stress

2025-09-04 收稿, 2026-02-27 录用, 2026-03-02 网络版发表.

1) 国家自然科学基金项目(52178344)资助.

2) 通讯作者: 顾晓强, 教授, 主要研究方向为土的基本特性、土动力学和宏微观土力学. E-mail: guxiaoliang@tongji.edu.cn

引用格式: 汪海林, 顾晓强, 尹振宇. 基于微观力学模型的砂土非共轴特性研究. 力学学报, 2026, 58(5): 1358-1369

Wang Hailin, Gu Xiaoliang, Yin Zhenyu. Study on the non-coaxial behavior of sand based on a micromechanical model. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2026, 58(5): 1358-1369

induces plastic deformation along its direction, causing the principal stress and plastic strain rate directions to progressively align and become coaxial. At the microscopic scale, the non-coaxial behavior of sand originates from fabric anisotropy caused by non-uniform particle distribution. To account for anisotropy, conventional elastoplastic constitutive models typically introduce anisotropic parameters into the yield function, plastic potential function, critical state line, and dilatation equation. However, these parameters are often empirically derived and lack a theoretical basis. In contrast, multiscale micromechanical models directly incorporate the soil's fabric anisotropy in the stress averaging equation without any empirical anisotropic parameters required by conventional elastoplastic constitutive models. Using a rotated second-order deviatoric fabric tensor and a fabric evolution law, we employed the Chang-Hicher (CH) micromechanical model to simulate drained triaxial and hollow cylinder torsional shear tests under various loading directions. Simulations demonstrate that the stress ratio, volumetric strain, and fabric anisotropy of sand evolve toward the critical state at large strains, which validates the compatibility of the model with the anisotropic critical state theory. The strength and deformation behaviors of soils are inherently linked to the evolution of their fabric. For undrained triaxial experiments subjected to non-coaxial loading with the material fabric, the strength of sands reduces significantly at large strains. Subsequently, changes in the fabric result in more contacts aligned with the loading direction, thereby recovering the soil's strength. Compared to simulation results reported in previous studies, the CH model accurately captures the effect of loading direction on the mechanical behaviors of sands.

Keywords sand, non-coaxial behavior, micromechanics, anisotropy, fabric evolution

引言

砂土的非共轴特性表现为主应力方向与塑性应变率方向不一致的现象. Roscoe^[1]最先在单剪试验中观察到了砂土的非共轴特性. 随后, Arthur 等^[2-3]的一系列剪切盒试验, Symes 等^[4]、Miura 等^[5]、Gutierrez 等^[6]、Yoshimine 等^[7-8]以及 Rodriguez 等^[9]的一系列空心圆柱扭剪试验系统研究了砂土的非共轴特性. 研究表明, 砂土在受到外部载荷时, 切应力增量会促进土体沿该方向发生塑性变形, 从而导致主应力方向与塑性应变率之间的夹角发生变化, 两者最终在临界状态时趋于共轴.

从微观上看, 砂土的非共轴特性源于土体颗粒的不均匀分布而使土体表现出的各向异性. 由于土体颗粒的形状、大小、排列方式以及孔隙的形态、大小、分布等因素的影响, 土的力学性质表现出明显的各向异性^[10]. 为了描述土的各向异性, 学者通常使用二阶组构张量^[11-12]表示土体颗粒的微观排列特征. Li 等^[13]从热力学基本原理出发, 在临界状态理论 (critical state theory, CST) 的基础上增加了组构各向异性也需达到其临界值的条件, 提出了各向异性临界状态理论 (anisotropic critical state theory, ACST). 随后, 学者使用 CT 扫描及图像处理技术^[14-15]和离散元模拟^[16-18]验证了各向异性临界状态理论的正确性. 在各向异性临界状态理论的框架下, 学者分

别将弹性模量^[19-20]、临界状态线^[21-22]、剪胀方程和塑性模量^[13,23-24]、屈服函数和塑性势函数^[25-29]等引入各向异性参数以反映组构各向异性对土体力学性质的影响. 尽管这些模型在模拟土的各向异性方面取得了一定的成功, 但其对于各向异性参数的选择通常是经验性的, 缺乏明确的物理意义.

离散单元法 (discrete element method, DEM) 是研究土体各向异性的有效工具. DEM 通过描述土体的微观结构, 从而直接表征土的各向异性^[20,30-31]. 然而, 由于 DEM 需要精确描述每个颗粒的运动状态, 其计算量较大, 因此难以用于工程实践. 为了克服 DEM 模拟的缺点, 学者提出了微观力学模型^[32-36]. 微观力学模型并不试图描述每个颗粒的运动状态, 而是在统计意义上对有限方向的接触力进行积分平均, 在考虑各向异性的同时大大减少了计算量. 微观力学模型通过在应力积分公式和应变积分公式中引入组构张量直接考虑土的组构各向异性, 无需像传统的弹塑性本构模型一样在屈服函数、剪胀方程或临界状态线上引入各向异性参数. Chang-Hicher (CH) 微观力学模型^[32]作为一个典型的微观力学模型, 已被广泛应用于模拟砂土^[32,37]、不饱和土^[38-39]、黏土^[40-41]、灌浆土^[42]以及月壤^[43]的力学行为. 然而, 使用 CH 微观力学模型模拟砂土非共轴特性的研究仍然较少见. Zhao 等^[44]提出了一个考虑塑性偏

应变、状态参数、应力比的组构演化公式, 并使用该公式在 CH 微观力学模型中模拟了砂土的非共轴特性, 但其模拟结果仍与试验数据相差甚大, 无法有效描述砂土的组构演化特性. 为此, 本工作基于 CH 微观力学模型的基本框架, 结合 Li 等^[13]提出的组构演化公式, 研究了加载方向对砂土力学行为的影响, 验证了 CH 微观力学模型模拟砂土非共轴特性的有效性.

1 CH 微观力学模型

1.1 模型的基本框架

CH 微观力学模型最初由 Chang 等^[32]提出用于模拟砂土的力学行为. 随后该模型被逐步扩展到用于模拟黏土^[40-41,45-46]、不饱和土^[38-39,47]以及土的组构各向异性^[44,48-49]. 根据 Zhao 等^[37], CH 微观力学模型的具体实现主要分为 4 个部分: 从宏观应力到微观接触力的离散假设、描述微观接触力与位移之间关系的接触模型、将微观接触力与位移转化为宏观应力与应变的均质化积分以及宏观接触力的相互平衡, 如图 1 所示.

首先, 宏观应力通过静态约束假设^[50]被转化为微观接触力

$$f_i^c = \sigma_{ij} A_{jn} l_n^c \quad (1)$$

式中, f_i^c 为接触力, σ_{ij} 为应力张量, l_n^c 为分支向量, A_{jn} 为代表微观颗粒排列的二阶组构张量, 其定义为

$$A_{jn} = \left(\frac{1}{V} \sum_{c=1}^N l_j^c l_n^c \right)^{-1} \quad (2)$$

式中, V 为代表性体积单元的体积, N 为代表性体积单元中的接触数量. 根据其定义, A_{jn} 与通常使用的二阶偏组构张量 F_{jn} ^[11] 之间的关系可以表示为

$$(A_{jn})^{-1} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^N l_j^c l_n^c = 4r^2 \frac{N}{V} \left(\frac{2}{15} F_{jn} + \frac{1}{3} I_{jn} \right) \quad (3)$$

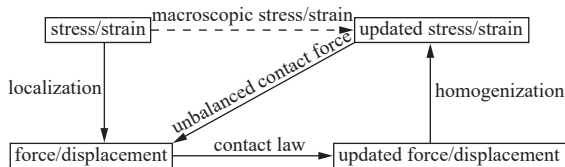


图 1 CH 微观力学模型的基本框架

Fig. 1 Basic framework of the CH micromechanical model

式中, r 为颗粒半径. 将根据静态约束假设得到的接触力基于弹性假设转化为接触位移, 然后使用接触模型对接触力进行塑性修正

$$df_i^c = k_{ij}^c du_j^c \quad (4)$$

式中, k_{ij}^c 为接触刚度矩阵, u_j^c 为接触位移. 随后, 更新后的接触力将根据 Love-Weber 公式^[51-52]积分得到宏观应力

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^N f_i^c l_j^c \quad (5)$$

应变则通过微观接触位移的积分得到^[50]

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1}{V} \left(\sum_{c=1}^N du_i^c l_n^c \right) A_{jn} \quad (6)$$

联立式 (1)、式 (4) 和式 (6), 可得到 CH 微观力学模型的宏观应力应变关系

$$d\epsilon_{ij} = S_{ijkl} d\sigma_{kl} \quad (7)$$

$$S_{ijkl} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^N (k_{jl}^c)^{-1} l_m^c l_n^c A_{mi} A_{nk}$$

由于根据静态约束假设得到的接触力与使用接触模型更新后的接触力并不相等, 因此上述过程得到的宏观应力和微观接触力并不一定平衡. 为此, 需使用迭代的方法使二者达到平衡^[37]. 不平衡的接触力可以通过下式进行计算

$$f_i^{c, \text{unb}} = \sigma_{ij} A_{jn} l_n - f_i^c \quad (8)$$

将不平衡的接触力 $f_i^{c, \text{unb}}$ 叠加到现有的接触力上, 然后重新计算宏观应力, 直到接触力在宏观达到平衡.

1.2 接触模型

接触模型用于描述微观接触力与接触位移之间的关系. 首先, CH 模型采用非线性弹性模型来描述接触的弹性行为

$$df_i^c = k_{ij}^{e,c} du_j^c, \quad k_{ij}^{e,c} = \text{diag}([k_n^c, k_r^c, k_r^c]) \quad (9)$$

式中, f_i^c 为接触力, u_j^c 为接触位移, $k_{ij}^{e,c}$ 为弹性刚度矩阵, $\text{diag}(\cdot)$ 为将向量转换为对角矩阵的函数. 法向刚度 k_n^c 和切向刚度 k_r^c 的表达式为^[32]

$$k_n^c = k_{n0}^c \left(\frac{f_n^c}{f_{\text{ref}}^c} \right)^{n_e}, \quad k_r^c = k_{rR} k_n^c \quad (10)$$

式中, f_n^c 为法向接触力, k_{n0}^c 为参考法向刚度, f_{ref} 为参考接触力, n_e 为弹性指数, k_{rR} 为切向刚度与法向刚度的比值.

接触的塑性行为则使用一种库伦模型来描述, 其屈服函数为

$$F = f_r^c - f_n^c \frac{k_p^c \tan \phi_p u_r^{p,c}}{f_n^c \tan \phi_p + k_p^c u_r^{p,c}}, \quad k_p^c = k_{pR} k_n^c$$

$$f_r^c = \sqrt{(f_s^c)^2 + (f_t^c)^2}, \quad u_r^{p,c} = \sqrt{(u_s^{p,c})^2 + (u_t^{p,c})^2} \quad (11)$$

式中, f_s^c 和 f_t^c 分别为两个方向的切向接触力, $u_s^{p,c}$ 和 $u_t^{p,c}$ 分别为两个方向的塑性切向位移, k_{pR} 为材料常数. ϕ_p 为峰值摩擦角, 它考虑了颗粒间的咬合效应

$$\tan \phi_p = \left(\frac{e_c}{e} \right)^{n_p} \tan \phi \quad (12)$$

式中, e 为孔隙比, e_c 为临界孔隙比, n_p 为咬合指数, ϕ 为临界摩擦角. 临界状态线的表达式为

$$e_c = e_{ref} - \lambda \left(\frac{p'}{p_a} \right)^\xi \quad (13)$$

式中, e_{ref} 为参考孔隙比, p' 为平均有效应力, p_a 为大气压力, λ 和 ξ 为控制临界状态线形状的参数. 为描述砂土的剪胀性, 定义了如下的剪胀方程

$$D = \frac{du_n^{p,c}}{du_r^{p,c}} = A_d \left(\tan \phi_d - \frac{f_r^c}{f_n^c} \right) \quad (14)$$

式中, A_d 为剪胀参数, 剪胀摩擦角 ϕ_d 定义为

$$\tan \phi_d = \left(\frac{e}{e_c} \right)^{n_d} \tan \phi \quad (15)$$

式中, n_d 为剪胀指数.

1.3 组构各向异性

微观力学模型的一个重要特点是可以在应力积分上考虑土的组构各向异性, 而无须与一般的弹塑性模型一样在屈服函数、剪胀方程或临界状态线上引入各向异性参数. 假设 Ψ 为一个定义在接触法向上的微观变量 (例如接触力 f_i^c), 那么它在接触法向上的积分 $\langle \Psi \rangle$ 可以离散为球面坐标系上的高斯积分^[53]

$$\langle \Psi \rangle = \int_{\Omega} \xi(\mathbf{n}) \Psi(\mathbf{n}) d\Omega \approx \sum_{c=1}^m w(\mathbf{n}) \xi(\mathbf{n}) \Psi(\mathbf{n}) \quad (16)$$

式中, $w(\mathbf{n})$ 为对应高斯积分点的权重, m 为积分点的数量, $\xi(\mathbf{n})$ 为接触法向的概率密度函数, 可使用二阶偏组构张量 F_{ij} 表达^[54]

$$\xi(\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} (1 + F_{ij} n_i n_j) \quad (17)$$

式中, $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_j = [\cos \gamma, \sin \gamma \cos \beta, \sin \gamma \sin \beta]^T$ 为接触法向的单位方向向量. 将式 (5) 和式 (6) 中的积分求和公式转化为式 (16) 所示的数值积分形式, 即可在微观力学模型中考虑土的组构各向异性. 例如, 式 (5) 所示的应力积分公式可表示为如下数值积分形式

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^N f_i^c l_j^c = \frac{N}{V} \sum_{c=1}^m w^c \xi^c \cdot f_i^c l_j^c \quad (18)$$

式中, w^c 和 ξ^c 分别为第 c 个积分点的权重和概率密度函数值.

自然重力沉积的土体通常表现出横观各向同性的组构特性^[44], 其二阶偏组构张量可以表示为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta/2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中, Δ 为土体的各向异性参数, 反映了土体各向异性的大小. 如图 2 所示, 当应力主方向与组构主方向不一致时, 土体的力学行为会表现出非共轴特性. 应力主方向与组构主方向之间的夹角越小, 法向接触与应力主方向一致的比例越高, 土体能更有效地抵抗外部载荷, 土体强度也随之增大. 相反, 当应力主方向与组构主方向之间的夹角较大时, 法向接触力与应力主方向不一致的比例增加, 土体强度降低.

若应力主方向与组构主方向之间的夹角为 α , 则可以通过以下公式将二阶偏组构张量转化为应力主方向坐标系下的二阶偏组构张量 $\mathbf{F}'$

$$\mathbf{F}' = \mathbf{R}(\alpha) \mathbf{F} \mathbf{R}(\alpha)^T \quad (20)$$

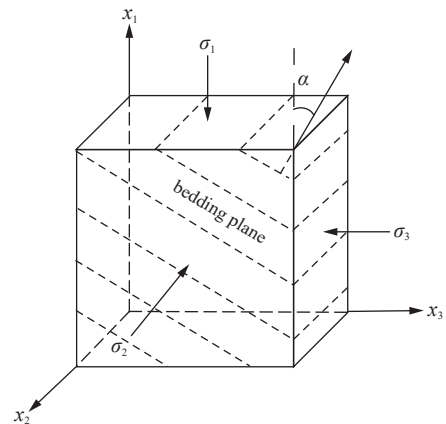


图 2 组构主方向与主应力方向的夹角
Fig. 2 Angle between directions of principle fabric and of principle stress

式中, $\mathbf{R}(\alpha)$ 为绕 x_2 轴旋转 α 的旋转矩阵, 其表达式为

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (21)$$

将旋转后的二阶偏组构张量代入式 (17) 中, 即可使用微观力学模型模拟土的非共轴特性. 在后续讨论中, “共轴加载”指应力主方向与组构主方向一致的加载条件 ($\alpha = 0^\circ$), “非共轴加载”指应力主方向与组构主方向不一致的加载条件 ($\alpha \neq 0^\circ$).

根据各向异性临界状态理论^[13], 土体的组构各向异性在临界状态时同样会达到其临界值, 这说明临界状态时的土体强度与初始组构无关, 而仅与加载方向有关. 为此, Li 等^[13] 提出了如下的组构演化公式

$$d\mathbf{F} = \langle \lambda \rangle c(\mathbf{n} - r\mathbf{F}) \quad (22)$$

式中, c 和 r 为模型参数, $\langle \lambda \rangle$ 为塑性偏应变的大小, $\mathbf{n}$ 为加载方向, 一般可取为塑性偏应变的方向. 为了描述组构张量 $\mathbf{F}$ 与加载方向 $\mathbf{n}$ 之间的相对关系, Li 等^[13] 提出了如下的组构各向异性变量 A

$$A = \mathbf{F} : \mathbf{n} = \mathbf{F} \mathbf{n}_F : \mathbf{n} = \mathbf{F} \mathbf{N} \quad (23)$$

式中, $\mathbf{n}_F$ 为组构张量的方向, $\mathbf{F}$ 为组构张量的范数, $\mathbf{N}$ 为加载方向的范数. 当组构张量 $\mathbf{F}$ 与加载方向 $\mathbf{n}$ 共轴时, $A = 1$. 因此, 可以将 A 作为判断土体是否达到各向异性临界状态的指标.

2 结果与讨论

2.1 模型参数的确定

本模型的主要参数可通过以下方法确定.

(1) 弹性参数 (k_{n0} , n_e , k_{rR}): 参数 k_{n0} 和 k_{rR} 控制材料的弹性行为, 其与宏观弹性模量 E 、剪切模量 G 和泊松比 ν 之间的关系为

$$\begin{aligned} E &= \frac{10k_{n0}}{rv} \frac{k_{rR}}{2+3k_{rR}}, & \nu &= \frac{1-k_{rR}}{2+3k_{rR}} \\ G &= \frac{5k_{n0}}{rv} \frac{k_{rR}}{3+2k_{rR}} \end{aligned} \quad (24)$$

因此, 可以通过测量材料的弹性模量和泊松比来确定参数 k_{n0} 和 k_{rR} . 参数 n_e 控制弹性模量的应力相关性, 其值通常在 $1/3 \sim 1$ 之间.

(2) 初始各向异性的大小 (Δ): 参数 Δ 控制材料的初始各向异性大小, 可以通过测量材料在不同加

载方向下的弹性模量来确定. 对于横观各向同性的材料, 不同方向的剪切模量比 G_{hh}/G_{hv} 与参数 Δ 之间的关系为^[55]

$$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = \frac{1+\Delta/10}{1+2\Delta/5} \quad (25)$$

因此, 可以通过测量材料的剪切模量比 G_{hh}/G_{hv} 来确定初始各向异性的大小 Δ

$$\Delta = \frac{10(1-G_{hh}/G_{hv})}{4G_{hh}/G_{hv}-1} \quad (26)$$

(3) 临界状态线参数 (e_{ref} , λ , ξ , ϕ_c): 参数 e_{ref} , λ 和 ξ 控制材料的临界状态线, 可以通过测量材料在不同围压下的临界孔隙比来确定. 摩擦角 ϕ_c 则可以通过测量材料在三轴试验下的临界应力比来确定. 根据 Wang 等^[56], 对于共轴加载下的常规三轴试验, 临界应力比 M 与摩擦角 ϕ_c 和临界状态下各向异性的大小 Δ_f 之间的关系为

$$\begin{aligned} M_{\text{TC}} &= \frac{(6+3\Delta_f/5)\sin\phi_c+9\Delta_f/5}{3-(1-4\Delta_f/5)\sin\phi_c} \\ M_{\text{TE}} &= \frac{(6+3\Delta_f/5)\sin\phi_c-9\Delta_f/5}{3+(1-4\Delta_f/5)\sin\phi_c} \end{aligned} \quad (27)$$

因此, 可以通过测量材料在三轴压缩和三轴拉伸下的临界应力比 M_{TC} 和 M_{TE} 来确定摩擦角 ϕ_c

$$\begin{aligned} \sin\phi_c &= \frac{3M_{\text{TC}}-9\Delta_f/5}{6+3\Delta_f/5+(1-4\Delta_f/5)M_{\text{TC}}} \\ \sin\phi_c &= \frac{3M_{\text{TE}}+9\Delta_f/5}{6+3\Delta_f/5-(1-4\Delta_f/5)M_{\text{TE}}} \end{aligned} \quad (28)$$

(4) 组构演化参数 (c , r): 参数 c 和 r 控制材料组构各向异性的演化速度和临界值. 对于常规三轴试验, r 可取为 1, 而参数 c 则需根据试验数据进行拟合.

(5) 咬合效应参数 (n_p) 和剪胀参数 (n_d , A_d): 参数 n_p 控制颗粒咬合效应对峰值摩擦角的影响, 参数 n_d 控制孔隙比对剪胀摩擦角的影响, 参数 A_d 控制材料的剪胀特性. 这些参数通常需根据试验数据进行拟合.

2.2 试验数据

为了评估微观力学模型对于砂土非共轴特性的模拟效果, 本文收集了文献中的试验数据, 详见表 1, 试验对应的模型参数详见表 2. 试验数据包括

表 1 试验数据总结

Table 1 Summary of experimental data		
Parameter	Cambria sand	Toyoura sand
mean diameter/mm	1.42	0.17
pressure/kPa	50/100/200/400	50/100/300/500
void ratio	0.535	0.861 ~ 0.890
reference	Ochiai et al. ^[57]	Yoshimine et al. ^[7]

表 2 模型参数总结

Table 2 Summary of model parameters		
Parameter	Cambria sand	Toyoura sand
$k_{n0}/(\text{N}\cdot\text{mm}^{-1}), n_e$	611, 0.68	79.9, 0.71
k_{rR}, k_{pR}	6.23, 0.16	0.31, 0.32
$\phi_c/(\text{^\circ})$	28.7	27.6
$e_{\text{ref}}, \lambda, \xi$	2.29, 1.18, 0.12	0.934, 0.019, 0.7
n_p, n_d, A_d	0.37, 0.92, 1.40	1.15, 0.58, 0.51
Δ, c, r	0.20, 4.39, 1.0	0.43, 3.63, 1.0

Cambria 砂的排水三轴试验^[57]和 Toyoura 砂的空心圆柱扭剪试验^[7]。其中, Cambria 砂的试验数据为不同围压下的砂土在 α 为 0° 和 90° 时的三轴排水试验数据, 目的是探究 Cambria 砂在不同围压下的非共轴特性; Toyoura 砂的试验数据为不同加载方向下的空心圆柱扭剪试验数据, 目的是探究 Toyoura 砂在不同加载方向下的非共轴特性。

2.3 Cambria 砂的模拟结果

图 3 展示了 Cambria 砂的排水三轴试验模拟结果, 图中 p_o 为初始平均应力。从图中可以看出, 模型能够较好地模拟 Cambria 砂在不同围压下的力学特性。由于 Cambria 砂存在初始各向异性, 接触法向在竖直方向的密度大于其水平方向的密度, 其竖直方向的强度大于水平方向的强度, 因此 Cambria 砂在共轴加载时 ($\alpha = 0^\circ$) 的偏应力和体积应变大于非共轴加载时 ($\alpha = 90^\circ$) 的偏应力和体积应变。同时, 在相同围压下, 不同加载方向时的偏应力和体积应变并未趋于同一临界值, 这说明材料此时并未达到各向异性临界状态。

为了验证模型是否满足各向异性临界状态理论, 模拟了 Cambria 砂在极大应变下的力学行为。图 4 展示了轴向应变加载到 80% 时组构各向异性变量 A 和组构张量的范数 F 的演化。可以看出, 随着应变的

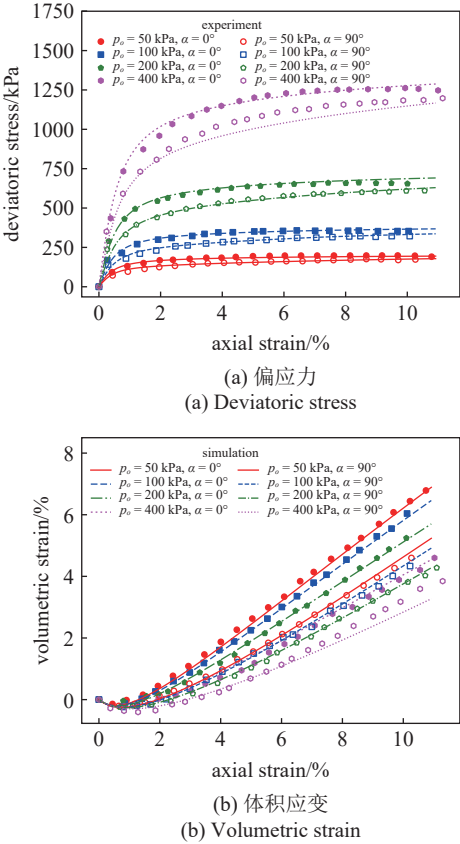
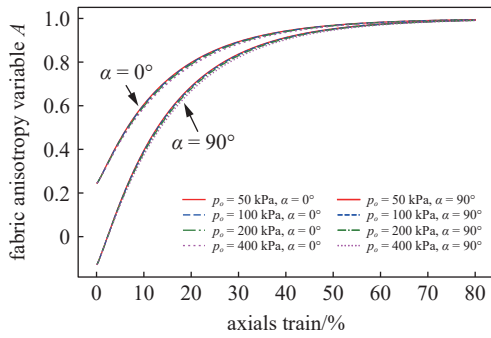


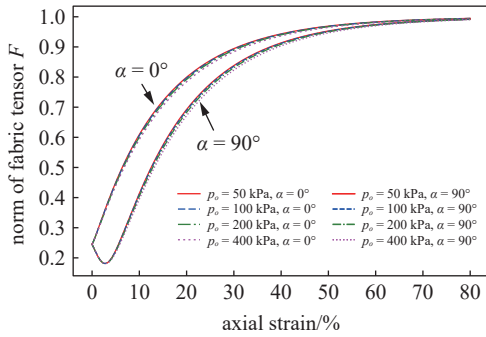
图 3 Cambria 砂的排水三轴试验与模拟结果比较
Fig. 3 Comparison between drained triaxial experiments and simulations on Cambria sand

增加, 组构各向异性变量 A 和组构张量的范数 F 均趋于 1, 这表明 Cambria 砂在极大应变下达到了各向异性临界状态, 这与文献 [13, 27-28] 中的结果是一致的。有趣的是, 非共轴加载时 ($\alpha = 90^\circ$) 组构张量的范数 F 先减小到 0.18 左右, 随后逐渐增加到 1, 而共轴加载时 ($\alpha = 0^\circ$) 组构张量的范数 F 则直接增加到 1。这种现象同样可以在先前的文献中观察到^[13,27,58]。当加载方向与材料的弱轴 (即组构的第二主方向) 一致时, 材料的组构发生重组以抵抗外部载荷, 这将导致材料的弱轴方向的接触数增加, 而材料的强轴 (即组构的第一主方向) 方向的接触数减少, 从而导致材料的加载初期由各向异性趋向于各向同性, 随后又逐渐趋向于各向异性临界状态。由于本文所使用的式 (29) 所示的组构演化公式仅仅考虑了塑性偏应变对组构的影响, 因此不同围压下的 Cambria 砂的各向异性的演化路径基本一致。由于微观力学模型直接在应力积分公式中考虑各向异性的影响, 因此可以很容易地引入不同的组构演化公式, 未来的工作可以在组构演化公式中引入应力对组构演化的影响。

图 3 表明 Cambria 砂在加载过程中应力比和体



(a) 组构各向异性变量
(a) Fabric anisotropy variable

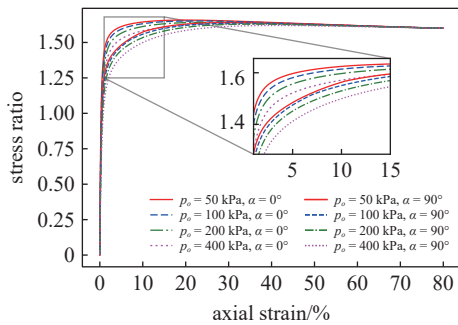


(b) 组构张量的范数
(b) Norm of fabric tensor

图 4 Cambria 砂的组构各向异性演化

Fig. 4 Evolution of fabric anisotropy for Cambria sand

积应变均未达到临界状态. 为了验证模型在考虑各向异性时应力比和体积应变的演化是否符合临界状态理论, 图 5 展示了极大应变下 Cambria 砂的应力比和体积应变的演化. 可以看出, Cambria 砂在轴向应变为 30% 左右时, 不同加载方向的应力比就已经达到临界状态 (不同加载方向的应力比趋于相同的临界值), 而体积应变和孔隙比则在轴向应变为 70% 左右时达到临界状态. 结合图 4 可以发现, 应力比达到临界状态时组构各向异性还未达到临界状态, 因此应力比在组构各向异性趋于临界状态的过程中还会发生一定的变化. 同时, 由于组构各向异性



(a) 应力比
(a) Stress ratio

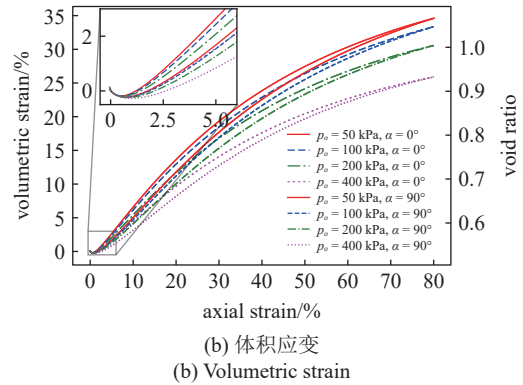
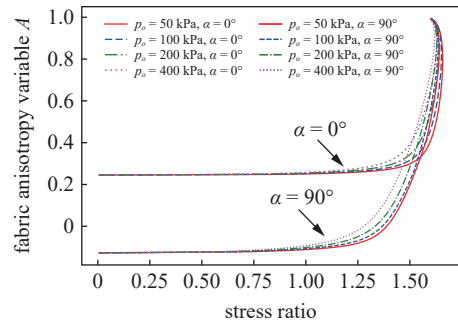


图 5 Cambria 砂的应力比和体应变演化

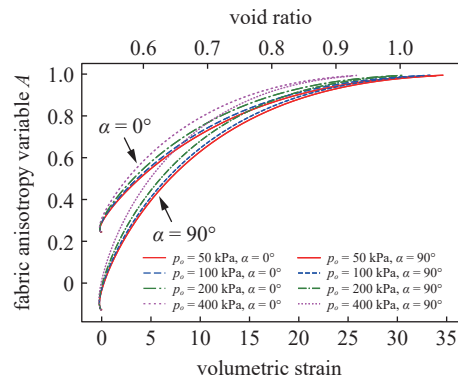
Fig. 5 Evolution of stress ratio and volumetric strain for Cambria sand

与应变积分公式 (式 (6)) 之间的耦合关系, 体积应变的演化与各向异性的演化息息相关而与应力比之间的关系不显著. 总而言之, CH 微观力学模型能够较好地模拟 Cambria 砂的非共轴特性, 并且在考虑组构各向异性时应力比和体积应变的演化符合各向异性临界状态理论.

图 6 为 Cambria 砂的应力比、体积应变与组构各向异性变量之间的关系. 从图中可以看出, 应力比



(a) 应力比和组构各向异性变量
(a) Stress ratio vs. fabric anisotropy variable



(b) 体积应变和组构各向异性变量
(b) Volumetric strain vs. fabric anisotropy variable

图 6 Cambria 砂的应力比、体应变与组构各向异性变量之间的关系

Fig. 6 Relationship between stress ratio, volumetric strain and fabric anisotropy variable for Cambria sand

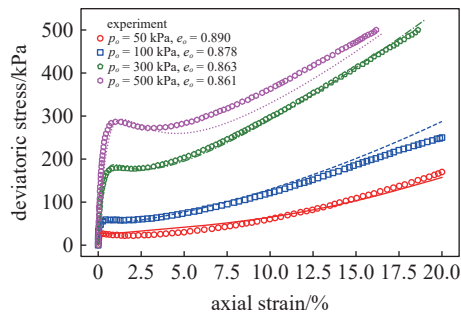
对于结构各向异性变量的敏感性较低, 而体积应变对于结构各向异性变量的敏感性较高. 在加载前期, 应力比迅速增长, 此时塑性应变较小, 结构各向异性的变化不显著. 随着加载的进行, 塑性应变不断累积, 结构各向异性变化显著, 应力比的增长速度减缓, 体积应变则逐渐增大. 最终, 当结构各向异性趋于临界状态时, 应力比和体积应变均达到临界状态. 上述结果表明, 由于本文使用的式 (29) 所示的基于塑性偏应变的结构演化公式, 结构各向异性变量的演化与应变的演化密切相关, 而与应力比之间的关系不显著.

2.4 Toyoura 砂的模拟结果

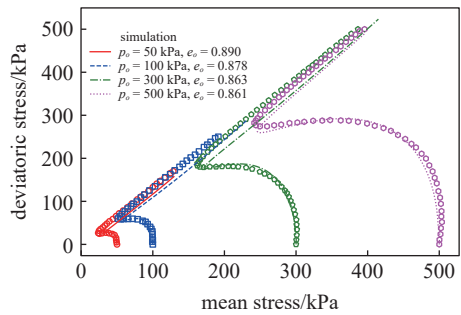
图 7 展示了不同围压、不同孔隙比下 Toyoura 砂的不排水三轴试验的模拟结果, 图中 e_0 为初始孔隙比. 从图中可以看出, 模型有效地模拟了 Toyoura 砂在不同加载条件下的力学行为. Zhao 等^[44] 同样使用 CH 微观力学模型并结合以下结构演化公式模拟了 Toyoura 砂的不排水三轴试验

$$dF = h \left\{ F_c - F : \frac{d\epsilon_q^p}{\|d\epsilon_q^p\|} \exp[m(M - \eta) + \psi] \right\} d\epsilon_q^p \quad (29)$$

式中, h , F_c , m 为模型参数, $d\epsilon_q^p$ 为塑性偏应变增量, η



(a) 轴向应变与偏应力
(a) Axial strain vs. deviatoric stress

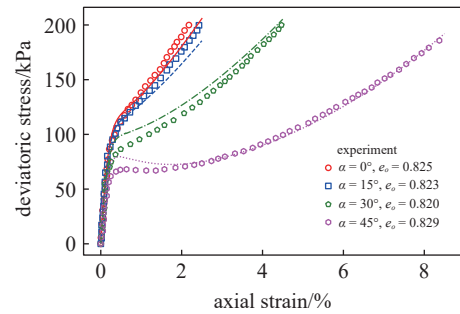


(b) 平均应力与偏应力
(b) Mean stress vs. deviatoric stress

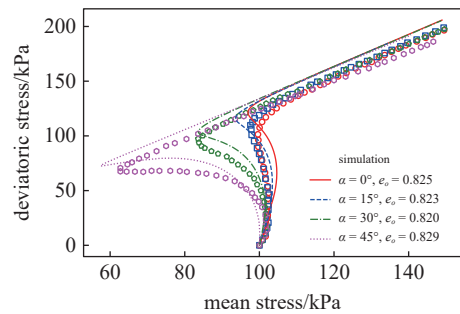
图 7 Toyoura 砂的不排水三轴试验和模拟结果比较
Fig. 7 Comparison between undrained triaxial experiments and simulations on Toyoura sand

为应力比, $\psi = e - e_c$ 为状态参数. Zhao 等^[44] 的模拟结果表明, 在小应变时, 模拟结果比试验结果偏软, 而在大应变时, 模拟结果比试验结果偏硬. 本文的模拟结果则表明, 模型在小应变和大应变时均能较好地模拟 Toyoura 砂的力学行为. 式 (29) 所示的结构演化公式考虑了应力比和状态参数对结构演化的影响, 并且该公式在临界状态时 ($M = \eta$, $\psi = e - e_c = 0$) 退化到式 (29) 所示的结构演化公式. 然而, 如式 (27) 所示, CH 微观力学模型中的临界应力比 M 与结构各向异性有关而并非常数, 因此式 (29) 中的 $M - \eta$ 项高估了应力比对结构演化的影响, 从而导致模拟结果在大应变时偏硬. 相比之下, 本文使用的式 (29) 所示的结构演化公式仅考虑了塑性偏应变对结构演化的影响, 模型在小应变和大应变时均能较好地模拟 Toyoura 砂的力学行为.

为了验证不同加载方向时的非共轴特性对砂土力学行为的影响, 我们模拟了 Toyoura 砂的空心圆柱扭剪试验^[7]. 根据 Li 等^[13], 空心圆柱扭剪试验可通过不同加载方向的不排水三轴试验来模拟. 图 8 和图 9 分别展示了不同加载方向下 Toyoura 砂的不排



(a) 轴向应变与偏应力
(a) Axial strain vs. deviatoric stress



(b) 平均应力与偏应力
(b) Mean stress vs. deviatoric stress

图 8 不同加载方向下的 Toyoura 砂的不排水三轴压缩试验与模拟结果比较

Fig. 8 Comparison between undrained triaxial compression experiments with different loading directions and simulations on Toyoura sand

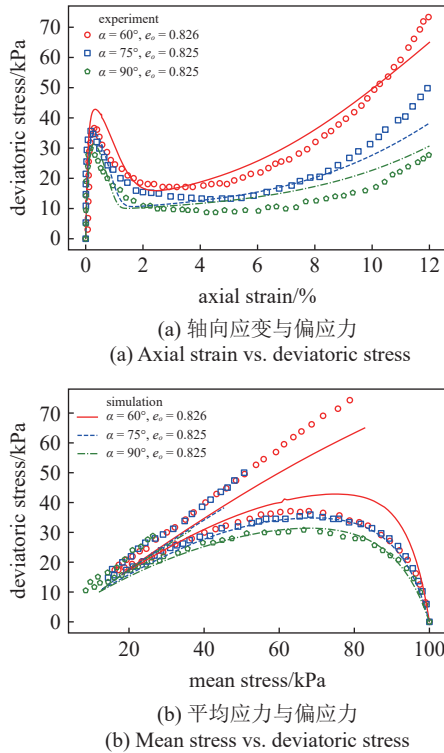


图 9 不同加载方向下的 Toyoura 砂的不排水三轴拉伸试验与模拟结果比较

Fig. 9 Comparison between undrained triaxial extension experiments with different loading directions and simulations on Toyoura sand

水三轴压缩试验和拉伸试验的模拟结果. 从图中可以看出, 模型有效地模拟了加载方向对于 Toyoura 砂土力学行为的影响. 当主应力方向与组构主方向之间的夹角 α 越大时, 土体越软, 强度也越低. 同时, 当 α 大于 45° 时, 土体在大应变下的强度显著降低, 但随后组构的变化导致其应力应变曲线折返.

为了更清晰地说明组构各向异性对 Toyoura 砂土力学行为的影响, 图 10 展示了 Toyoura 砂在不同加载方向下的组构各向异性变量 A 和组构张量的范数 F 的演化. 可以看出, 随着应变的增加, 组构各向异性变量 A 和组构张量的范数 F 均趋于 1, 这表明 Toyoura 砂在极大应变下达到了各向异性临界状态, 这与 Cambria 砂的排水三轴试验模拟结果一致. 与 Cambria 砂不同的是, 当 α 为 90° 时, 组构张量的范数 F 先减小到 0, 随后逐渐增加到 1. 由于 Toyoura 砂的初始各向异性较大, 土在水平方向的强度显著小于竖直方向的强度. 因此在水平加载时, 土体的组构很容易发生重组使得加载方向有更多的法向接触力以抵抗外部载荷, 从而导致组构张量的范数 F 在加载初期迅速减小到 0. 当 α 在 $60^\circ \sim 90^\circ$ 之间时, 组构张量的范数 F 则先减小到一定值, 随后逐渐增加到 1.

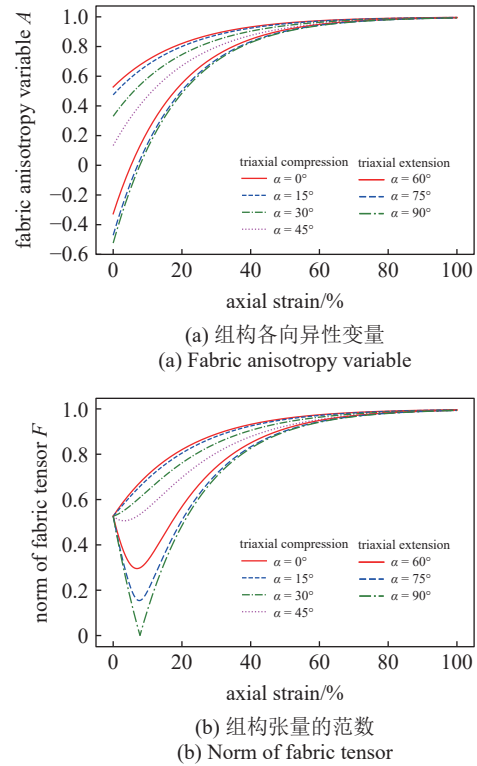


图 10 Toyoura 砂的组构各向异性演化

Fig. 10 Evolution of fabric anisotropy for Toyoura sand

这说明 α 越大, 组构张量在加载初期越容易趋于各向同性, 随后又逐渐趋于各向异性临界状态. 当 α 越大时, 与加载方向同向的法向接触的比例越小, 土体的组构越容易发生重组使得加载方向有更多的法向接触力以抵抗外部载荷, 从而导致组构张量的范数 F 在加载初期逐渐减小. 随着加载的进行, 组构主方向逐渐与加载方向一致, 与加载方向同向的法向接触的比例逐渐增大, 组构张量的范数 F 也逐渐增大, 最终趋于各向异性临界状态. 因此, 在图 9 中, 当 α 大于 45° 时, 土体在大应变下的强度显著降低, 随后组构的变化导致加载方向的法向接触的比例增大, 土的强度得以恢复, 从而导致应力应变曲线折返.

图 11 展示了文献中报道的 Toyoura 砂不排水三轴压缩试验的模拟结果. 从图中可以看出, Li 等^[13] 和 Zhao 等^[44] 的模拟结果大致捕捉了加载方向对砂土力学行为的影响. Li 等^[13] 在剪胀状态线 (dilatancy state line, DSL) 中引入了组构各向异性参数 A 以考虑砂土的各向异性. 尽管本研究采用了 Li 等^[13] 的组构演化公式, 但模拟结果明显更优. 组构各向异性对于应力剪胀关系的影响可以通过式 (6) 所示的应变积分公式反应, 而其对于砂土强度的影响可以通过式 (5) 所示的应力积分公式反应. Li 等^[13] 虽考虑了

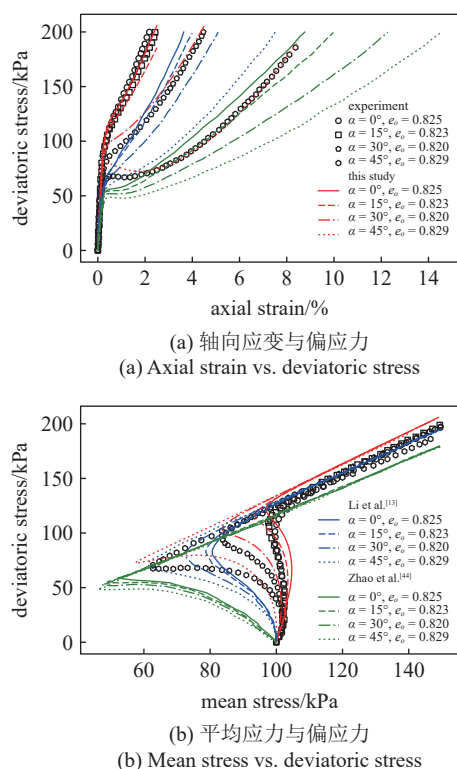


图 11 文献中对于 Toyoura 砂的不排水三轴压缩试验模拟结果

Fig. 11 Comparison between simulations and undrained triaxial compression experiments on Toyoura sand in previous literature

组构各向异性对砂土剪胀特性的影响,但未考虑组构各向异性对砂土强度的影响,因此其模拟结果未能有效地捕捉加载方向对砂土力学行为的影响。这表明 Zhao 等^[44]提出的组构演化公式无法有效表征 Toyoura 砂的组构演化特性。值得注意的是, Zhao 等^[44]假设 Toyoura 砂的初始组构张量的范数 F 为 0.2,这与 Li 等^[13]采用的 0.4 以及本研究中采用的 0.53 存在显著差异(作为对比, Gao 等^[27-28]取为 0.45)。这一差异表明, Zhao 等^[44]显著低估了 Toyoura 砂的初始各向异性,从而导致其模拟结果显著低估了加载方向对于砂土力学行为的影响。

3 结论

本文使用 CH 微观力学模型模拟了砂土的非共轴特性。通过在应力积分公式中直接引入组构各向异性,模型能够有效地模拟砂土在不同加载方向下的力学行为。本文得到主要结论如下。

(1) CH 微观力学模型能够有效地模拟砂土的非共轴特性,通过模拟排水和不排水条件下的三轴试验,揭示了组构各向异性对砂土非共轴力学特性的影响。与文献中报道的模拟结果相比,本文的模拟结

果更好地捕捉了加载方向对砂土力学行为的影响。

(2) 排水和不排水三轴试验的模拟结果表明,大应变下砂土的应力比、体积应变与组构各向异性均逐渐趋于临界状态,这验证了模型符合临界状态理论。

(3) 土体的强度和变形特性与组构的演化密切相关。例如,对于 α 大于 45° 时的不排水三轴试验,土体在大应变下的强度显著降低,随后组构的变化导致加载方向的法向接触的比例增大,土体的强度得以恢复,从而导致应力应变曲线出现折返现象。

参 考 文 献

- 1 Roscoe KH. The influence of strains in soil mechanics. *Geotechnique*, 1970, 20(2): 129-170
- 2 Arthur JRF, Menzies BK. Inherent anisotropy in a sand. *Geotechnique*, 1972, 22(1): 115-128
- 3 Arthur JRF, Chua KS, Dunstan T. Induced anisotropy in a sand. *Geotechnique*, 1977, 27(1): 13-30
- 4 Symes MJPR, Gens A, Hight DW. Undrained anisotropy and principal stress rotation in saturated sand. *Geotechnique*, 1984, 34(1): 11-27
- 5 Miura K, Miura S, Toki S. Deformation behavior of anisotropic dense sand under principal stress axes rotation. *Soils and Foundations*, 1986, 26(1): 36-52
- 6 Gutierrez M, Ishihara K, Towhata I. Flow theory for sand during rotation of principal stress direction. *Soils and Foundations*, 1991, 31(4): 121-132
- 7 Yoshimine M, Ishihara K, Vargas W. Effects of principal stress direction and intermediate principal stress on undrained shear behavior of sand. *Soils and Foundations*, 1998, 38(3): 179-188
- 8 Yoshimine M, Özyay R, Sezen A, et al. Undrained plane strain shear tests on saturated sand using a hollow cylinder torsional shear apparatus. *Soils and Foundations*, 1999, 39(2): 131-136
- 9 Rodriguez NM, Lade PV. Non-coaxiality of strain increment and stress directions in cross-anisotropic sand. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, 51(5): 1103-1114
- 10 葛云峰, 唐辉明, 王亮清等. 天然岩体结构面粗糙度各向异性、尺寸效应、间距效应研究. *岩土工程学报*, 2016, 38(1): 170-179 (Ge Yunfeng, Tang Huiming, Wang Liangqing, et al. Anisotropy, scale and interval effects of natural rock discontinuity surface roughness. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, 38(1): 170-179 (in Chinese))
- 11 Kanatani KI. Stereological determination of structural anisotropy. *International Journal of Engineering Science*, 1984, 22(5): 531-546
- 12 Yang ZX, Li XS, Yang J. Quantifying and modelling fabric anisotropy of granular soils. *Geotechnique*, 2008, 58(4): 237-248
- 13 Li XS, Dafalias YF. Anisotropic critical state theory: Role of fabric. *Journal of Engineering Mechanics*, 2012, 138(3): 263-275
- 14 Zhao CF, Pinzón G, Wiebicke M, et al. Evolution of fabric aniso-

- tropy of granular soils: X-ray tomography measurements and theoretical modelling. *Computers and Geotechnics*, 2021, 133: 104046
- 15 Druckrey AM, Imseeh WH, Alshibli KA. Experimental evaluation of the anisotropic critical state theory for sand using 3D fabric evolution data of triaxial experiments. *Acta Geotechnica*, 2022, 17(6): 2193-2211
 - 16 Fu P, Dafalias YF. Relationship between void- and contact normal-based fabric tensors for 2D idealized granular materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, 63: 68-81
 - 17 Kruyt NP, Rothenburg L. A micromechanical study of dilatancy of granular materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2016, 95: 411-427
 - 18 Yang ZX, Wu Y. Critical state for anisotropic granular materials: A discrete element perspective. *International Journal of Geomechanics*, 2017, 17(2): 04016054
 - 19 殷宗泽, 徐志伟. 土体的各向异性及近似模拟. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 547-551 (Yin Zongze, Xu Zhiwei. Anisotropy of soils and its approximate simulation. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, 24(5): 547-551 (in Chinese))
 - 20 高彦斌, 王江锋, 叶观宝等. 粘性土各向异性特性的 PFC 数值模拟. 工程地质学报, 2009, 17(5): 638-642 (Gao Yanbin, Wang Jiang-feng, Ye Guanbao, et al. PFC numerical simulation on anisotropic properties of cohesive soil. *Journal of Engineering Geology*, 2009, 17(5): 638-642 (in Chinese))
 - 21 Wan RG, Guo J. Drained cyclic behavior of sand with fabric dependence. *Journal of Engineering Mechanics*, 2001, 127(11): 1106-1116
 - 22 Li XS, Dafalias YF. Constitutive modeling of inherently anisotropic sand behavior. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2002, 128(10): 868-880
 - 23 Papadimitriou AG, Chaloulos YK, Dafalias YF. A fabric-based sand plasticity model with reversal surfaces within anisotropic critical state theory. *Acta Geotechnica*, 2019, 14(2): 253-277
 - 24 Petalas AL, Dafalias YF, Papadimitriou AG. Sanisand- f_n : An evolving fabric-based sand model accounting for stress principal axes rotation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2019, 43(1): 97-123
 - 25 袁静, 龚晓南, 刘兴旺等. 软土各向异性三屈服面流变模型. 岩土工程学报, 2004, 26(1): 88-94 (Yuan Jing, Gong Xiaonan, Liu Xing-wang, et al. An anisotropic time-dependent trinal-yield-surface model for the stress-strain-time behavior of soft clay. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2004, 26(1): 88-94 (in Chinese))
 - 26 魏星, 黄茂松. 天然结构性黏土的各向异性界面模型. 岩土工程学报, 2007, 29(8): 1224-1229 (Wei Xing, Huang Maosong. Anisotropic bounding surface model for natural structured clays. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2007, 29(8): 1224-1229 (in Chinese))
 - 27 Gao Z, Zhao J, Li XS, et al. A critical state sand plasticity model accounting for fabric evolution. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2014, 38(4): 370-390
 - 28 Gao Z, Zhao J. A non-coaxial critical-state model for sand accounting for fabric anisotropy and fabric evolution. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, 106-107: 200-212
 - 29 Gao Z, Ma P, Tang Y, et al. A novel constitutive model of the anisotropic sand accounting for the fabric evolution. *Computers and Geotechnics*, 2024, 176: 106797
 - 30 周健, 池永. 土的工程力学性质的颗粒流模拟. 固体力学学报, 2004, 25(4): 377-382 (Zhou Jian, Chi Yong. Simulating soil properties by particle flow code. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2004, 25(4): 377-382 (in Chinese))
 - 31 王涛, 吕庆, 李杨等. 颗粒离散元方法中接触模型的开发. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(z2): 4040-4045 (Wang Tao, Lyu Qing, Li Yang, et al. Development of contact model in particle discrete element method. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2009, 28(z2): 4040-4045 (in Chinese))
 - 32 Chang CS, Hicher PY. An elasto-plastic model for granular materials with microstructural consideration. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(14): 4258-4277
 - 33 Darve F, Nicot F. On incremental non-linearity in granular media: Phenomenological and multi-scale views (Part I). *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2005, 29(14): 1387-1409
 - 34 Darve F, Nicot F. On flow rule in granular media: Phenomenological and multi-scale views (Part II). *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2005, 29(14): 1411-1432
 - 35 Nicot F, Darve F. The H-microdirectional model: Accounting for a mesoscopic scale. *Mechanics of Materials*, 2011, 43(12): 918-929
 - 36 Xiong H, Nicot F, Yin ZY. A three-dimensional micromechanically based model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2017, 41(17): 1669-1686
 - 37 Zhao CF, Yin ZY, Hicher PY. Integrating a micromechanical model for multiscale analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2018, 114(2): 105-127
 - 38 Hicher PY, Chang CS. A microstructural elastoplastic model for unsaturated granular materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44(7): 2304-2323
 - 39 Zhao C, Salami Y, Yin ZY, et al. A micromechanical model for unsaturated soils based on thermodynamics//Proceedings of the Sixth Biot Conference on Poromechanics. Reston, 2017
 - 40 Chang CS, Hicher PY, Yin ZY, et al. Elastoplastic model for clay with microstructural consideration. *Journal of Engineering Mechanics*, 2009, 135(9): 917-931
 - 41 Yin ZY, Zhao J, Hicher PY. A Micromechanics-based model for sand-silt mixtures. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, 51(6): 1350-1363
 - 42 Hicher PY, Chang CS, Dano C. Multi-scale modeling of grouted sand behavior. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45(16): 4362-4374
 - 43 Chang CS, Hicher PY. Model for granular materials with surface energy forces. *Journal of Aerospace Engineering*, 2009, 22(1): 43-52
 - 44 Zhao CF, Kruyt NP. An evolution law for fabric anisotropy and its application in micromechanical modelling of granular materials.

- International Journal of Solids and Structures*, 2020, 196-197: 53-66
- 45 Yin ZY, Chang CS. Microstructural modelling of stress-dependent behaviour of clay. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, 46(6): 1373-1388
- 46 Yin ZY, Hattab M, Hicher PY. Multiscale Modeling of a Sensitive Marine Clay. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2011, 35(15): 1682-1702
- 47 Zhao CF, Salami Y, Hicher PY, et al. Multiscale modeling of unsaturated granular materials based on thermodynamic principles. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2019, 31(1): 341-359
- 48 Chang CS, Yin ZY. Micromechanical modeling for inherent anisotropy in granular materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 2010, 136(7): 830-839
- 49 Yin ZY, Chang CS, Hicher PY. Micromechanical modelling for effect of inherent anisotropy on cyclic behaviour of sand. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, 47(14): 1933-1951
- 50 Liao CL, Chang TP, Young DH, et al. Stress-strain relationship for granular materials based on the hypothesis of best fit. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, 34(31): 4087-4100
- 51 Love AEH. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Fourth Edition. Cambridge: Cambridge Press, 1927
- 52 Weber J. Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérants; application à la rhéologie de ces milieux. *Cahiers Français de Rhéologie*, 1966, 2: 161-170
- 53 Bažant P, Oh BH. Efficient numerical integration on the surface of a sphere. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1986, 66(1): 37-49
- 54 Kanatani KI. Distribution of directional data and fabric tensors. *International Journal of Engineering Science*, 1984, 22(2): 149-164
- 55 Chang CS, Liao CL. Estimates of elastic modulus for media of randomly packed granules. *Applied Mechanics Reviews*, 1994, 47(1S): S197-S206
- 56 Wang HL, Gu X, Yin ZY. A generalized anisotropic failure criterion for granular materials based on a multi-scale micromechanical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 2026, 325: 113696
- 57 Ochiai H, Lade PV. Three-dimensional behavior of sand with anisotropic fabric. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1983, 109(10): 1313-1328
- 58 Li X, Li XS. Micro-macro quantification of the internal structure of granular materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 2009, 135(7): 641-656